Data: 14 de Novembro 2022 (16h30)
Duração: 45 min
Curso: LMAC
Professora: Patricia Conde Muíño

TERMODINÂMICA E FÍSICA ESTATÍSTICA

SEGUNDO MAP45 - RECUPERAÇÃO

VERSÃO - A

O MAP45 terá a duração de 45 min e pode ser resolvido nas folhas anexas ao enunciado ou numa folha de ponto devidamente identificada. O MAP45 consiste em 5 perguntas de escolha múltipla e um problema. As respostas às perguntas de resposta múltipla devem ser inscritas na "folha de respostas MAP45"que lhe foi entregue para o efeito. Não se esqueça de indicar a versão do MAP45 na folha de resposta múltipla, assim como identifica-la com o seu nome e número.

Na resolução do exercício, leia com atenção o enunciado e justifique claramente as suas respostas em todas as alíneas.

Questões de resposta múltipla

Questão 1 [2 valores] Os dois estados de mais baixa energia de certa molécula são $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = \epsilon$. Considere um sistema macroscópico de N moléculas de esta substância em equilíbrio com uma fonte de calor a temperatura T. Qual será o valor médio da energia de uma molécula?

A) ϵ

B) $\dfrac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT}+1}$

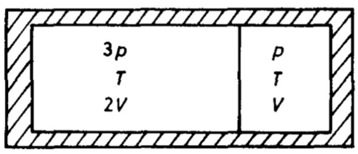
C) $\dfrac{\epsilon}{e^{-\epsilon/kT}+1}$

D) $\dfrac{\epsilon e^{-\epsilon/kT}+1}{e^{-\epsilon/kT}+1}$

E) $\epsilon e^{-\epsilon/kT}+1$

F) Nenhuma das anteriores.

Questão 2 [2 valores] Considere um sistema isolado termicamente composto por dois volumes, V e 2V, de um gás ideal monoatómico separados por uma divisória termicamente condutora e móvel. As temperaturas e pressões são como mostrado. A partição agora pode-se mover sem haver mistura de gases. Quando o equilíbrio é estabelecido, qual é a variação na energia interna total do gás?



A) $2kT$

B) $3kT/2$

C) Zero

D) $3kT$

E) kT

F) Nenhuma das anteriores.

Questão 3 [2 valores] Uma garrafa de vidro de volume V_0 contém ar à temperatura ambiente e à pressão de 1 atm. Ele é colocado numa câmara cheia de gás hélio, de volume $2V_0$. Uma vez introduzida a garrafa, a pressão do hélio na câmara é de 1 atm. O vidro da garrafa é feito de um material permeável ao hélio, mas não a outros gases (é dizer, não é permeável ao ar). A câmara com a garrafa dentro ficam armazenados a temperatura constante durante o tempo suficiente como para que se alcance o equilíbrio. Qual será a pressão dentro da garrafa uma vez alcançado o equilíbrio?

A) 1.5 atm

B) 2.0 atm

C) 3.0 atm

D) 0.5 atm

E) 2.5 atm

F) Nenhuma das anteriores.

Questão 4 [2 valores] Uma máquina térmica reversível opera entre dois reservatórios de calor a temperaturas $T_1 = 500$ K e $T_2 = 300$ K. A fonte fria pode ser considerada como tendo massa infinita, ou seja, T_2 permanece constante. No entanto, o reservatório mais quente, inicialmente a temperatura T_1, consiste numa quantidade finita de gás a volume constante ($\nu = 200$ moles com um calor específico $c = 25$ J/(mol $\cdot$ K). Após o funcionamento da máquina térmica a temperatura T_1 desce para $T_1^f = 300$ K. Qual é o calor extraído do reservatório mais quente durante todo o tempo de operação da máquina?

A) 5000 kJ

B) 3465.7 kJ

C) 8333.3 kJ

D) 1000 kJ

E) 40 kJ

F) Nenhuma das anteriores.

Questão 5 [2 valores] Considere a mesma máquina descrita na questão anterior. Qual foi o trabalho total efetuado pela máquina desde que entrou em funcionamento com a fonte quente a temperatura T_1 até que esta atingiu a temperatura T_2?

A) $\nu c(T_2 - T_1 - \dfrac{T_1^2}{T_2} + 1)$

B) $\nu c(T_2 - T_1)\dfrac{T_1 - T_2}{T_2}$

C) $\nu c \left(T_2 - T_1 - T_2 ln \dfrac{T_2}{T_1} \right)$

D) $\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1} \right) \nu c$

E) Zero

F) Nenhuma das anteriores.

Problema 1 A equação de estado que descreve a tensão exercida por uma faixa elástica em equilíbrio a uma temperatura T é dada pela seguinte expressão:

$$F = AT\left(\frac{x}{\ell_0} - \frac{\ell_0^2}{x^2}\right)$$

onde F é a tensão, T a temperatura absoluta, x o comprimento da banda, ℓ_0 o comprimento da banda quando a tensão é nula e A é uma constante. A capacidade calorífica deste elástico para $x = \ell_0$ é $c_x(\ell_0, T) = K$, onde K é uma constante .

a) [2 valores] Mostre que para este sistema $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = 0$.

b) [2 valores] Mostre que a capacidade calorífica para qualquer alongamento é $C_x(x, T) = K$.

c) [2 valores] Mostre que para qualquer processo adiabático a temperatura constante o trabalho realizado pela banda é igual a zero.

d) [2 valores] Derive a equação fundamental que relaciona dS com dT e dx.

e) [2 valores] A capacidade calorífica da banda a tensão constante, será maior ou menor que $C_x(x, T)$ Justifique a sua resposta.

(página em branco)

Data: 14 de Novembro 2022 (14h00)
Duração: 45 min
Professora: Patricia Conde Muíño

Termodinâmica e Física Estatística

LMAC 2022/23

FOLHA DE RESPOSTAS - RECUPERAÇÃO 2º MAP45

Assinale com uma cruz (X) a sua resposta. Não se esqueça de indicar o seu nome, número de Aluno(a) e a versão do MAP45.

Número:	Nome:	Versão: A

Respostas
2° MAP45

Q1	A	B	C	D	E	F
Q2	A	B	C	D	E	F
Q3	A	B	C	D	E	F
Q4	A	B	C	D	E	F
Q5	A	B	C	D	E	F

(página em branco)

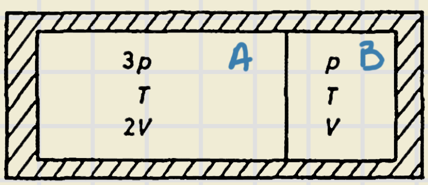
Recuperação 2º MAP45

Q1) $\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \rightarrow N$ moléculas $\quad T$

$$\bar{\varepsilon} = ? \rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sum_r \varepsilon_r e^{-\beta \varepsilon_r}}{\sum_r e^{-\beta \varepsilon_r}} = \frac{0\, e^{-\beta \varepsilon_1} + \varepsilon e^{-\beta \varepsilon_2}}{e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon e^{-\beta \varepsilon}}{1 + e^{-\beta \varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} + 1} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon / kT} + 1}$$

Q2)



Equilíbrio $\begin{cases} \text{Térmico: } T_{f_A} = T_{f_B} \\ \text{Mecânico: } P_{f_A} = P_{f_B} \end{cases}$

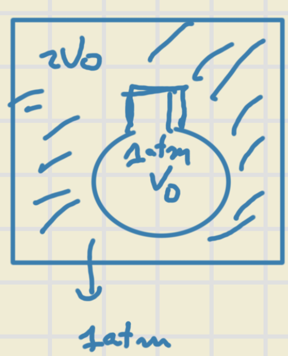
O gás já está em equilíbrio térmico $\Rightarrow T = \text{const}$

Para um gás ideal: $E = E(T) \Rightarrow \boxed{\Delta E = 0}$

Q3) V_0

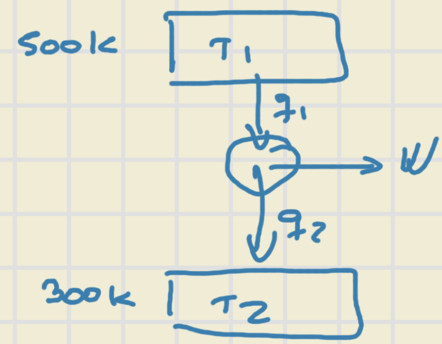
$$P_0^{He} V_{He}^{0} = \nu R T$$

$$P_0^{He} = \frac{\nu R T}{V_0}$$



$$P_f^{He} = \frac{\nu R T}{V_f} = \frac{\nu R T}{2 V_0} = \frac{1}{2} P_0^{He}$$

$$P_f^{garrafa} = P_{He} + P_{ar} = (1 + 0{,}5)\ \text{atm} \Rightarrow \boxed{P_f^{gar} = 1{,}5\ \text{atm}}$$



Q4) $T_1 = 500\,K$

$\nu = 200$ moles

$c = 25\ J/mol\,K$

$T_1 \rightarrow T_1^f = 300\,K$

$$c = \frac{1}{\nu}\frac{dQ}{dT} = \text{const} \Rightarrow Q = \int \frac{dQ}{dT}\, dT = c\nu\,\Delta T$$

$$Q = 200\ \cancel{moles} \cdot 25\ J/(\cancel{mol}\ \cancel{K})\ (500-300)\ \cancel{K} = 1000000 = 10^6\ J$$

$\boxed{Q : 1000\ kJ}$

Foi dada por válida também a solução com $T_f = 200K$

Q5 W ?

$$dW = \eta\, dq_1 = \frac{T - T_2}{T}\, \nu c\, dT$$

máq. reversível

$$W = \int_{T_1}^{T_2} \left(1 - \frac{T_2}{T}\right) \nu c\, dT = \int_{T_1}^{T_2} \nu c\, dT - T_2 c\nu \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T}\, dT =$$

$$= \nu c \left(T_2 - T_1 - T_2 \ln \frac{T_2}{T_1} \right)$$

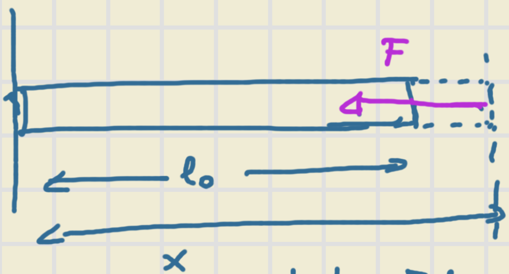
Problema 1

$$F = AT\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right)$$

$C_x(l_0, T) = K = const$

a) $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = 0$?

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_x dT + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T dx$$



$dW = -F dx$
↳ Feito pela fita elástica.

$dE = TdS + Fdx =$

$$= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T dx + F dx$$

$$= C_x dT + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + F\right] dx$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_x = C_x$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + F$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

Fazendo a equivalência $P \leftrightarrow -F$ e $V \leftrightarrow x$:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x \rightarrow \text{Relações de Maxwell}$$

Demonstração: T, x

↳ $dE = TdS + Fdx = d(TS) - SdT + Fdx \Rightarrow$

$$d(E - TS) = dF_{Free} = -SdT + Fdx$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial x} \Rightarrow -\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x = A\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = -T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + F = -TA\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right) + AT\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right) = 0 \quad //$$

qqd

b) $C_x(x,T) = k \quad \forall x, T$?

Formulário, fazendo a equivalência $p \longleftrightarrow F$ e $V \longleftrightarrow x$.

$$dE = C_x\, dT + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + F\right] dx = C_x\, dT + \left[-T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x + F\right] dx$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial T} = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial x} \Rightarrow \left(\frac{\partial C_x}{\partial x}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left[-T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x + F\right] =$$

$$= \cancel{-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x} - T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_x + \cancel{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x} = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_x$$

→ Também está no formulário: $\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_x = \frac{\partial}{\partial T}\left[A\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{C_x(x,T) = k = \text{const}}$$ qqd.

c) $dQ = 0$, $T = \text{const} \Rightarrow W = 0$?

$$dQ = dE + dW \Rightarrow Q = \Delta E + W \Rightarrow \Delta E = -W$$

$$dE = C_x\, dT + \cancel{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T} dx = C_x\, dT = k\, dT \Rightarrow \Delta E = k(T_f - T_0)$$

$$T_f = T_0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow W = 0 \quad // \text{ qqd.}$$

d) $\Delta S = ?$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x dT + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T dT = \frac{c_x}{T} dT - \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x dx =$$

$$= \frac{k}{T} dT - A\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right) dx$$

$$\Delta S = S(x,T) - S(x_0, T_0) = \left[S(x,T) - S(x, T_0)\right] + \left[S(x, T_0) - S(x_0, T_0)\right]$$

$$= \int_{T_0}^{T} \frac{k}{T'} dT' - \int_{l_0}^{x} A\left(\frac{x'}{l_0} - \frac{l_0^2}{x'^2}\right) dx' =$$

$$= k \ln\frac{T}{T_0} - A\left(\frac{x'^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{3x'^3}\right)\Big|_{l_0}^{x}$$

$$= k \ln\frac{T}{T_0} - A\left(\frac{x^2}{2l_0} - \frac{l_0^{\cancel{2}}}{2\cancel{l_0}} + \frac{l_0^2}{3x^3} - \frac{\cancel{l_0^2}}{3l_0^{\cancel{3}}}\right) =$$

$$\boxed{\Delta S = k \ln\frac{T}{T_0} - A\left(\frac{x^2}{2l_0} - \frac{l_0}{2} + \frac{l_0^2}{3x^3} - \frac{1}{3l_0}\right)}$$

e) $C_F = ?$ $\qquad C_F = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_F = T\left(\frac{dS}{dT}\right)_F$

$$dS = C_x dT + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T dx$$

$$dQ = T dS = dE + dW \underset{\substack{\uparrow \\ C_x = \text{const}}}{=} c_x dT + dW$$

: a mesma quantidade de calor agora serve para produzir trabalho e aumentar $T \Rightarrow$

$$\boxed{C_F > C_x}$$